ANÁLISE DO LUCRO DAS FIRMAS CONSIDERANDO FUNÇÕES DE CUSTO QUADRÁTICAS

FIRM PROFIT ANALYSIS CONSIDERING QUADRATIC COST FUNCTIONS

Leonardo Araujo da Silva
Aluno de iniciação científica da Universidade Católica de Brasília
sawada1500@gmail.com

Wilfredo Sosa Sandoval
Doutor em Matemática, IMPA. Pós-Doutorado pela Universidade Blaise Pascal de Clermont Ferrand-França
Universidade Católica de Brasília (UCB), Professor.
sosa@ucb.br

George Henrique de Moura Cunha
Pesquisador Colaborador do Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade de Brasília - UNB.
georgehmc@outlook.com

Resumo

Esta pesquisa foca em analisar o lucro de uma firma representativa, a partir de sua função de custo de produção. Antes, devemos caracterizar essa função de custo como quadrática. A chave à construção teórica de nossa análise é uma ferramenta matemática que foi desenvolvida por Fenchel no contexto da Análise Convexa — essa ferramenta, por definição, captura o comportamento maximizador de lucro. Além disto, para testar numericamente nossos resultados, tomamos séries de dados (no período 1994 - 2015) acerca dos preços do metro quadrado de apartamento construído em cada estado do Brasil. Nossa fonte de dados foi o IBGE. Desse modo, podemos calibrar as respectivas funções de custo quadráticas.

Palavras-chave: Análise Convexa. Análise de Lucros. Funções de Custo Quadráticas.

Abstract

This research focuses on analyzing the profit of a representative firm, based on its cost of production function. Rather, we must characterize this cost function as quadratic. The key to the theoretical construction of our analysis is a mathematical tool that was developed by Fenchel in the context of Convex Analysis - this tool, by definition, captures profit maximizing behavior. In addition, to numerically test our results, we took data series (from 1994 to 2015) about the prices of square meters of apartments built in each state of Brazil. Our data source was IBGE. In this way we can calibrate their quadratic cost functions.

Keywords: Convex Analysis. Profit Analysis. Quadratic Cost Functions.

1 INTRODUÇÃO

Segundo a teoria de microeconomia, o lucro de uma firma representativa é definido como a receita menos os custos de produção. Contudo, suponhamos que seja produzido um único produto. Então, a receita é definida como py, onde $p > 0$ representa o preço do produto no mercado e $y \geq 0$, a quantidade produzida pela firma. Também, lembremo-nos que os custos de produção são definidos por período (diários, semanais, mensais ou anuais). Para simplificar, suponhamos que haja um único período. Dessa forma, $f: [0, L] \to [0, +\infty)$ denotará a função de custos, em que $[0, L] \subset R$ é o conjunto de todas as possíveis formas de produção, L o limite do processo produtivo no período e $f(y) \geq 0$ os custos de produção, em unidades monetárias, de produzir y unidades. De acordo com essas considerações, a função lucro é:

$$py - f(y) \tag{1}$$

Mas também, não nos devemos esquecer que o objetivo da firma é maximizar seu lucro. Isto é,

$$\max_{y \in [0,L]} \{py - f(y)\}.$$

Por outro lado, a Conjugada de Fenchel (introduzida pelo matemático alemão Fenchel (FENCHEL, 1949)) é uma ferramenta muito importante na matemática, pois estende a conhecida desigualdade de Young e responde à pergunta de Fenchel: "É possível construir uma família de funções C e um operador $T : C \to C$?". A conjugada é importante, por exemplo: em Análise Funcional, em Analise Convexa e em Otimização. Uma forma de verificar essa afirmação é observar a quantidade de artigos e de livros que existem na literatura matemática sobre esse tema. Por exemplo em (ROCKAFELLAR, 1974), o autor faz um estudo sistemático da conjugada de Fenchel no contexto da Análise Convexa. Em (MOREAU, 1970), o autor generaliza a conjugada de Fenchel em espaços abstratos e para todo tipo de funções, chamada na literatura como a Conjugada de Fenchel-Moreau. Em (COTRINA, E., *et al.*, 2011), os autores introduzem uma especialização da conjugada de Fenchel-Moreau para funções semicontínuas inferiores. Em (COTRINA, RAUPP e SOSA, 2015), os autores aplicam a conjugada de Fenchel-Moreau para introduzir um esquema de dualidade em programação semicontínua. Em uma série de trabalhos (SINGER, 1986), (SINGER, 1989), (SINGER, 1991), o autor trata a Teoria da Dualidade no contexto da Teoria da Otimização. Em (LEGAZ, 2005), o autor trata a dualidade convexa generalizada e suas aplicações na economia. Em (CUNHA, OLIVEIRA e SOSA, 2016), os autores desenvolvem a conjugada de Fenchel-Moreau no contexto da teoria do consumidor.

Para definir a conjugada de Fenchel, em nosso caso, requeremos uma função $f: R \to R \cup \{+\infty\}$ que se defina como

$$f^*(p) = \sup_{y \in R} \{py - f(y)\} \tag{2}$$

Notamos que a conjugada de Fenchel é uma ferramenta matemática que nos permite descrever o máximo lucro de uma firma, quando f representa os custos de produção, $p > 0$ representa o preço ditado pelo mercado do produto e $dom(f) = \{y \in \mathrm{R} : f(y) > -\infty\} = [0, L]$ representa a restrição da firma a produzir.

A base dessa definição foi o seguinte resultado introduzido por Fenchel em 1949.

Teorema 1. *Seja $f : R \to R \cup \{+\infty\}$ uma função. Existe uma função convexa própria semicontínua inferiormente $f^* : R \to R \cup \{+\infty\}$ tal que $f(y) = sup_{p \in R}\{py - f^*(p)\}$ se, e somente se, f é convexa própria semicontínua inferiormente. Dadas essas condições, a existência da função f^* é única. Aliás, f^* é a menor função convexa semicontínua inferiormente que cumpre:*

$$f^*(p) \geq py - f(y)\ \forall y \in R, \forall p \in R.$$

A primeira propriedade do lucro segue diretamente da definição da conjugada de Fenchel. Ainda, lembremo-nos que $f : R \to R \cup \{+\infty\}$ é uma função própria se $dom(f) \neq \emptyset$.

Lema 1. *Seja $f : R \to R \cup \{+\infty\}$ uma função própria. A seguinte desigualdade sempre acontece:*

$$f(y) + f^*(p) \geq py, \forall y \in R, \forall p \in R \tag{3}$$

O significado desse lema é: dada uma produção y e um preço p, os custos de produzir y mais o maximo lucro ao preço p sempre é maior ou igual à receita.

Definição 1. *Define-se os subdiferenciais de uma função convexa semicontínua como*

$$\partial f(y) = \{p \in R : f(x) \geq f(y) + p(x - y)\ \forall x \in R\} \tag{4}$$

Notamos que, se f é convexa e semicontínua, a desigualdade (3) vira igualdade, se p pertence ao subdiferencial de f em y. Isto é, no caso convexo, a produção que maximiza o lucro pode ser verificada quando a igualdade é satisfeita.

A segunda propriedade que utilizamos segue do Teorema de Weierstrass.

Lema 2. *Seja $f : R \to R \cup \{+\infty\}$ uma função própria semicontínua inferiormente. Se $dom(f) \neq \emptyset$ for compacto, então $f^* : R \to R$.*

O significado desse lema é: sempre existe uma forma de produção que gera o máximo lucro. Ademais, do ponto de vista da Teoria Econômica, dada uma economia com um agente representativo, a produção que maximiza o lucro desse agente representativo é fundamental para definir a oferta desse mercado. Isto é, para cada preço $p > 0$, se $\bar{y}(p)$ é a produção que maximiza seu lucro, então $y : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida como $y(p) = \bar{y}(p)$, se $f^*(p) \geq 0$, e em qualquer outro caso $y(p) = 0$, é a oferta desse produto no mercado.

Nosso objetivo consiste em analisar o lucro de firmas, considerando funções de produção quadráticas, dispondo como ferramenta matemática da conjugada de Fenchel e das condições de otimalidade clássicas, que caracterizam a produção ótima. Portanto, na seguinte seção consideramos as funções de custo quadráticas. Na seção 3, calibramos, em função dos componentes mão de obra e materiais, os parâmetros dos custos quadráticos do setor de construção de imóveis em cada estado do Brasil. Para tanto, as séries de dados de preços dos materiais e de mão de obra da construção de um metro quadrado foram obtidas do site do IBGE.

2 FUNÇÕES DE CUSTO QUADRÁTICAS

Lembremo-nos de que uma função $f : R \to R$ que se anula na origem é quadrática, se existem $A, a \in R$ tais que $f(y) = \frac{1}{2}Ay^2 + ay$. Assim, uma função quadrática que representa os custos de produção de uma firma é definida da seguinte forma:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}Ay^2 + ay & se \quad y \in [0, L] \\ +\infty \quad se & y \notin [0, L] \end{cases} \tag{5}$$

Para cada $y \in [0, L]$, temos que $f(y) = \left(\frac{A}{2}y + a\right)y$. Desse modo, podemos inferir dessa equação que o preço para produzir y unidades é $\frac{A}{2}y + a$, por conseguinte $\left(\frac{A}{2}y + a\right) \geq 0$, $\forall y \in [0, L]$. Temos, portanto, $f(y) = \left(\frac{A}{2}y + a\right)y \geq 0$, $\forall y \in [0, L]$. Ademais, notamos que a representa o custo fixo e $\frac{A}{2}$ o preço marginal variável para produzir cada unidade de produto no período.

Definidas estas condições: quando $y \in [0, L]$, a firma terá a mensuração de seus custos pela função $f(y) = \frac{1}{2}Ay^2 + ay$, e quando $y \notin [0, L]$, seus custos não serão mensuráveis, e serão iguais a $+\infty$; podemos inferir como a Conjugada de Fenchel modela o comportamento que maximiza o lucro:

$$\begin{aligned} f^*(p) &= \sup_{y \in R}\{py - f(y)\} \\ &= \sup_{y \in [0,L]}\{py - \frac{A}{2}y^2 - ay\} \end{aligned} \tag{6}$$

Sob o Lema 2, a qualquer preço de mercado p, sempre existe uma produção que maximiza o lucro. E esse máximo lucro $f^*(p)$ é um número real. Entretanto, segundo a Teoria Econômica, a produção de máximo lucro, que denotamos por $\bar{y}(p)$, porque depende do preço estabelecido pelo mercado, é fundamental para definir a oferta. Portanto, a conjugada de Fenchel, além de modelar o máximo lucro da firma, oferece também a oferta $y : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ao mercado. De fato, esses fatores tornam se demonstrações de que tal conjugada é uma ferramenta importante na Teoria da Produção.

Para aplicar as condições de otimalidade, temos que calcular o ponto crítico da seguinte função quadrática $h : R \to R$ definida como:

$$h(y) = -\frac{A}{2}y^2 + (p - a)y \tag{7}$$

Notamos que h é a função lucro. Portanto,

$$h(y) = -\frac{A}{2}y^2 + (p - a)y$$

$$h'(y) = -Ay + (p - a)$$
$$= -Ay + (p - a) = 0$$
$$\bar{y} = \frac{p-a}{A}$$

Por conseguinte, o ponto crítico de h é $\bar{y} = \frac{(p-a)}{A}$. Logo:

$$\text{h}(\bar{y}) = -\frac{\text{A}}{2}\left[\frac{(p-a)}{A}\right]^2 + (\text{p} - \text{a})\frac{(\text{p}-\text{a})}{\text{A}}$$
$$= -\frac{(p-a)^2}{2A} + \frac{2}{2}\frac{(p-a)^2}{A}$$
$$h(\bar{y}) = \frac{(p-a)^2}{2A}$$

No entanto, para sabermos se esse ponto crítico é um valor de máximo ou de mínimo, teremos que aplicar as condições de otimalidade de segunda ordem. Isso implica analisar $h''(\bar{y}) = -A$.

2.1 QUANDO A FUNÇÃO LUCRO É CÔNCAVA

Como sabemos da Analise Convexa que a segunda derivada de uma função quadrática é constante, neste caso $h''(y) = -A\ \forall y \in R$.

Se a segunda derivada é negativa, também sabemos da Análise Convexa que essa função quadrática é côncava. Se supomos o caso de $A \geq 0$, então h é côncava, pois $h'' = -A \leq 0$. No entanto, nesta seção consideramos o caso de $A > 0$.

A Análise Convexa garante que todo ponto crítico de uma função côncava é um ponto de máximo. À vista disso, o ponto crítico que encontramos é um ponto de máximo para a função quadrática h.

Dessa forma, se o ponto crítico $\bar{y} < 0$, então o supremo é atingido quando $y = 0$. Porém, se o ponto crítico $\bar{y} \in [0, L]$, então o supremo é atingido quando $y = \bar{y}$. Finalmente, se $\bar{y} > L$, então o supremo é atingido em $y = L$. Senão vejamos:

$$f^*(p) = \begin{cases} 0 \quad se \quad p < a \\ \dfrac{(p-a)^2}{2A} \quad se \quad a \leq p \leq AL + a \\ -\dfrac{AL^2}{2} + (p-a)L \quad se \quad AL + a < p \end{cases}$$

Notamos que o máximo lucro segue sendo uma função convexa não decrescente a respeito do preço p. Em vista disso, o máximo lucro é zero quando o preço $p \leq a$. Em qualquer outro caso, o máximo lucro é positivo.

Sob outra perspectiva, para cada $p > 0$, temos a produção que maximiza o lucro, a qual é fundamental para a função oferta $y : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, que é definida como:

$$y(p) = \begin{cases} 0 \quad se \quad p < a \\ \dfrac{p-a}{A} \quad se \quad a \leq p \leq AL + a \\ L \quad se \quad AL + a < p \end{cases}$$

Quando o preço p dado pelo mercado é menor de que a, percebemos que a firma não produz, porque o lucro é negativo, portanto a oferta é nula. Se o preço p pertence ao intervalo $[a,\ AL + a]$, então a oferta cresce linearmente com uma taxa marginal de $\frac{1}{A}$. Mas, se o preço p é maior de que $AL + a$, logo a firma opera em sua máxima produção.

2.2 QUANDO A FUNÇÃO LUCRO É CONVEXA

Da Analise Convexa sabemos que uma função quadrática é convexa, se a segunda derivada é positiva. Se supomos o caso de $A \leq 0$, então h é convexa pois $h'' = -A \geq 0$. Contudo, nesta seção consideramos o caso de $A < 0$.

A Analise Convexa garante que todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo. Portanto, o ponto crítico que encontramos é um ponto de mínimo para a função quadrática h. Temos, então, que o maximizador da função h é um ponto de canto no intervalo $[0, L]$.

Toda função quadrática convexa é simétrica a respeito de seu ponto crítico, sabemos. Logo, se o ponto crítico $\bar{y} > \frac{L}{2}$, então o supremo é atingido em $y = 0$. Porém, se o ponto crítico $\bar{y} < \frac{L}{2}$, então o supremo é atingido em $y = L$. Assim:

$$f^*(p) = \begin{cases} 0 \quad se \quad p < \dfrac{LA}{2} + a \\ -\dfrac{AL^2}{2} + (p - a)L \quad se \quad p \geq \dfrac{AL}{2} + a \end{cases}$$

Observamos que o máximo lucro segue sendo uma função convexa não decrescente a respeito do preço p. Dessarte, o máximo lucro é zero quando o preço $p < \frac{LA}{2} + a$. Em qualquer outro caso, o máximo lucro é não negativo.

No entanto, para cada $p > 0$, temos a produção que maximiza o lucro, a qual é fundamental para a função oferta $y : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, que é definida como:

$$y(p) = \begin{cases} 0 \quad se \quad p < \dfrac{LA}{2} + a \\ L \quad se \quad p \geq \dfrac{AL}{2} + a \end{cases}$$

Notamos que, quando o preço p dado pelo mercado é menor de que $\frac{LA}{2} + a$, a firma não produz, porque o lucro é zero, portanto a oferta é nula. Se o preço p é maior ou igual que $\frac{LA}{2} + a$, então a firma opera com sua capacidade máxima de produção.

2.3 QUANDO A FUNÇÃO LUCRO É AFIM LINEAR

Este caso ocorre quando $A = 0$. Isto é, a função de custo de produção se reduz a $f(y) = ay$; notamos que a representa o custo por unidade produzida. Assim,

$$f^*(p) = \begin{cases} 0 & se \quad p < a \\ (p-a)L & se \quad p \geq a \end{cases}$$

Observamos que o máximo lucro segue sendo uma função convexa não decrescente a respeito do preço p. Portanto, o máximo lucro é zero quando o preço $p < a$. Em qualquer outro caso, o máximo lucro é não negativo.

No entanto, para cada $p > 0$, temos a produção que maximiza o lucro, que é fundamental para a função oferta $y : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida como:

$$y(p) = \begin{cases} 0 & se \quad p < a \\ L & se \quad p \geq a \end{cases}$$

Notamos que, quando o preço p dado pelo mercado é menor de que a, a firma não produz, porque o lucro é zero, portanto a oferta é nula. Se o preço p é maior ou igual que a, então a firma opera com sua capacidade máxima de produção.

Comentário 1. *A produção que maximiza o lucro* $\bar{y} : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *é definida como se segue:*

Caso côncavo

$$\bar{y}\,(p) = \begin{cases} 0 & se \quad p < a \\ \dfrac{p-a}{A} & se \quad a \leq p \leq AL + a \\ L & se \quad AL + a < p \end{cases}$$

Caso convexo

$$\bar{y}\,(p) = \begin{cases} 0 & se \quad p < \dfrac{LA}{2} + a \\ L & se \quad p \geq \dfrac{AL}{2} + a \end{cases}$$

Caso afim linear

$$\bar{y}\,(p) = \begin{cases} 0 & se \quad p < a \\ L & se \quad p \geq a \end{cases}$$

3 CALIBRAGEM DOS PARÂMETROS

Como o preço é definido pelo mercado, a condição de otimalidade aplicada à função lucro diz que

$$p = Ay + a.$$

Além disso, para ajustar os parâmetros A e a, consideramos uma série de dados temporais dos custos por metro quadrado construído de um apartamento, obtida do IBGE.

O parâmetro A é calibrado por meio da seguinte regressão linear:

$$CM_i = \beta_0 + AT_i + er_i \tag{8}$$

em que CM_i denota o valor do m^2 (em relação à mão de obra ou ao material) da observação i da série de dados; $T_i = i$, a varável de tendência; e er_i, o erro na regressão em relação ao dado i.

O outro parâmetro é obtido como:

$$a = (1/m)\sum_{j=1}^{m} CM(i).$$

3.1 REGRESSÃO PARA MÃO DE OBRA

Considerando as observações obtidas, ao longo de julho de 1994 a agosto de 2016, pelo Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índice da Construção Civil do IBGE, a respeito dos custos do m^2 da construção civil, a partir do levantamento de preços correntes pagos pela mão de obra utilizada pelo setor de habitação dos estados brasileiros (gerando 27 séries de 266 dados temporais), chegamos aos seguintes resultados econométricos:

UF	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{R^2}$	**p-valor**	
DF	234,5434	1,39643	0,959737	< 0.0001	***
GO	227,8451	1,41542	0,948577	< 0.0001	***
MT	240,2036	1,51147	0,925787	< 0.0001	***
MS	233,8913	1,36505	0,936380	< 0.0001	***
RS	239,9871	1,39515	0,947030	< 0.0001	***
SC	293,9382	1,81117	0,899968	< 0.0001	***
PR	296,9948	1,68567	0,962205	< 0.0001	***
SP	318,0361	1,76972	0,964406	< 0.0001	***
RJ	316,0437	1,98891	0,967013	< 0.0001	***
ES	217,8867	1,47175	0,941173	< 0.0001	***
MG	239,8026	1,46924	0,964421	< 0.0001	***
BA	244,2384	1,43839	0,970018	< 0.0001	***
SE	208,8353	1,37284	0,953651	< 0.0001	***
AL	237,5528	1,2449	0,973398	< 0.0001	***
PE	219,3455	1,36079	0,952612	< 0.0001	***
PB	218,0979	1,43369	0,930559	< 0.0001	***
UF	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{R^2}$	**p-valor**	
RN	205,2290	1,29191	0,929860	< 0.0001	***
CE	222,5373	1,30981	0,958389	< 0.0001	***
PI	206,1161	1,46071	0,947088	< 0.0001	***
MA	221,2947	1,44926	0,956173	< 0.0001	***

TO	264,2015	1,40239	0,960435	< 0.0001	***
AP	223,3828	1,43678	0,934752	< 0.0001	***
PA	238,5425	1,3896	0,933720	< 0.0001	***
RR	313,5372	1,37858	0,947794	< 0.0001	***
AM	261,3855	1,36433	0,972410	< 0.0001	***
AC	244,5891	1,73421	0,942037	< 0.0001	***
RO	241,5451	1,61182	0,915331	< 0.0001	***

Tabela 1: Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), usando as observações (1994:07-2016:08) de cada estado brasileiro. Fonte: Elaboração própria.

3.2 REGRESSÃO PARA MATERIAIS

Uma outra contribuição aos custos do setor de habitação da construção civil é o componente materiais. Dessa forma, dispondo das observações (27 séries temporais de 266 dados), também recolhidas pelo Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil do IBGE, ao longo de julho de 1994 a agosto de 2016, relativas aos preços correntes de materiais pagos pelo setor de habitação em cada estado brasileiro, obtemos os seguintes resultados econométricos:

UF	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{R^2}$	***p-valor***	
DF	352,8598	1,61828	0,929258	< 0.0001	***
GO	343,0006	1,66177	0,947085	< 0.0001	***
MT	341,7203	1,66975	0,944105	< 0.0001	***
MS	353,6000	1,62739	0,925910	< 0.0001	***
RS	354,4003	1,41975	0,924198	< 0.0001	***
SC	320,5574	1,54522	0,952367	< 0.0001	***
PR	312,9319	1,37645	0,939471	< 0.0001	***
SP	342,5199	1,46591	0,945052	< 0.0001	***
RJ	350,3251	1,5167	0,948269	< 0.0001	***
ES	306,5173	1,44111	0,955169	< 0.0001	***
MG	317,2469	1,50724	0,956780	< 0.0001	***
UF	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{R^2}$	***p-valor***	
BA	321,0320	1,39864	0,947628	< 0.0001	***
SE	315,4524	1,42351	0,927778	< 0.0001	***
AL	338,1891	1,46502	0,932204	< 0.0001	***
PE	322,3355	1,48627	0,951370	< 0.0001	***
PB	344,3102	1,56119	0,908174	< 0.0001	***

RN	331,6110	1,29172	0,896284	< 0.0001	***
CE	327,6248	1,52249	0,921281	< 0.0001	***
PI	330,9246	1,56297	0,912996	< 0.0001	***
MA	356,7106	1,45654	0,882624	< 0.0001	***
TO	353,2841	1,74136	0,911916	< 0.0001	***
AP	361,3988	1,5055	0,934814	< 0.0001	***
PA	352,0198	1,45597	0,890938	< 0.0001	***
RR	374,7696	1,37091	0,849353	< 0.0001	***
AM	356,1463	1,51302	0,896380	< 0.0001	***
AC	380,9456	1,7112	0,880815	< 0.0001	***
RO	354,2630	1,69108	0,891243	< 0.0001	***

Tabela 2: MQO, usando as observações (1994:07-2016:08) de cada estado brasileiro. Fonte: Elaboração própria.

3.3 ANÁLISE DOS LUCROS

Segundo nossa econometria, os valores de A e de a em cada estado são estritamente positivos, de modo que estão associados à funções de lucro h côncavas. Dessarte, as funções que modelam os comportamentos de lucros ótimos são descritas como:

$$f^*(p) = \begin{cases} 0 \quad se \quad p < a \\ \dfrac{(p-a)^2}{2A} \quad se \quad a \leq p \leq AL + a \\ -\dfrac{AL^2}{2} + (p-a)L \quad se \quad AL + a < p. \end{cases}$$

Concomitantemente, obtemos as respectivas ofertas iguais a:

$$y(p) = \begin{cases} 0 \quad se \quad p < a \\ \dfrac{p-a}{A} \quad se \quad a \leq p \leq AL + a \\ L \quad se \quad AL + a < p. \end{cases}$$

Além disso, notamos que os lucros das empreiteiras progridem quadraticamente.

3.4 CASO DO DISTRITO FEDERAL

Ao considerarmos o Distrito Federal, temos $A = 1,39643 + 1,61828 = 3,0147$ e $a = 243,5434 + 352,8598 = 587,4032.$ Por exemplo, no caso de um apartamento de 200 m^2, o custo total para a sua construção (mão de obra e materiais) é de $\left(\frac{3,0147*200}{2} + 587,4032\right) * 200 =$ 177.774,64 reais.

Podemos supor que uma empreiteira se disponha a construir um projeto imobiliário por $R\$\ 3.500,00/m^2$. Desse modo, segundo o nosso modelo, seu lucro seria de $f^*(3.500) = 1.406.975,84$ reais.

Porém, o valor médio de venda residencial no DF, em junho de 2018, esteve em $R\$\ 7.754,00/m^2$, conforme divulgado pelo índice *FipeZap de Preços de Imóveis Anunciados*. Portanto, o valor médio total daquele apartamento ao consumidor foi de $7.754,00 * 200 = 1.550.800,00$ reais.

A diferença $1.550.800{,}00 - 1.406.975{,}84 = 143.824{,}16$ reais correspondeu a receita das corretoras de imóveis.

4 CONCLUSÃO

Verificamos, ao longo de todo o desenvolvimento do trabalho, o comportamento de uma firma representativa que se comprometia unicamente em maximizar seus lucros, cujo o cenário de mercado estabelecia o preço do único produto negociável. De fato, a teoria microeconômica consagrada apresenta, por meio da análise dos efeitos marginais dos componentes do lucro, resultados mais que convincentes a respeito do nível ótimo de produção dessa firma e, por consequência, da oferta de mercado. Contudo, máxime através da elaboração do trabalho empírico, vimos a enorme facilidade do arcabouço que sustenta a conjugada de Fenchel de abranger todos os resultados previstos pela teoria microeconômica consagrada. Ademais, conseguimos maior consistência matemática a esses resultados. Portanto, podemos considerar a conjugada de Fenchel como uma ferramenta matemática indispensável à modelagem do comportamento maximizador de lucros.

ACKNOWLEDGEMENTS

Wilfredo Sosa was partially supported by Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAP-DF) [grant 0193.001695/2017 and PDE 05/2018].

REFERÊNCIAS

COTRINA, J. et al. (2011). Fenchel-Moreau conjugation for lower semi continuous functions. Optimization. v. 60, p. 1045–1057.

COTRINA, J.; RAUPP, F. M. P.; SOSA, W. (2015). Semi Continuous Quadratic Programming: existence conditions and duality scheme. Journal of Global Optimization. v. 63, p. 281–295.

CROUZEIX, J. P.; KERAGEL, A.; SOSA, W. (2011). Programación Matemática Diferenciable. Universidad Nacional de Ingenieria, Facultad de Ciencias, MathSciNet MR2963294.

CUNHA, G.; OLIVEIRA, M.; SOSA, W. (2016). Remarks on Fenchel-Moreau conjugate in the setting of consumer theory. EconomiA. v. 17, p. 176–184..

FENCHEL, W. (1949). On conjugate convex functions. Canadian Journal Mathematics. v. 1, p. 73-77.

LEGAZ, J. E. M. (2005). Generalized convex duality and its economic applications. Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity, Nonconvex Optim. Appl., 76, Springer. New York, p. 237-292.

MOREAU, J. J. (1970). Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques. J. Math. Pures et Appl. v. 49, p. 109–154.

ROCKAFELLAR, R. T. (1974). Conjugate duality and optimization. SIAM.

SINGER, I. (1986). A general theory of dual optimization problems. J. Math. Anal. v. 116, p. 77–130.

SINGER, I. (1989). A general theory of dual optimization problems II. On the perturbational dual problem corresponding to an unpertubational dual problem. Z. Oper. Res. v. 33, p. 241–258.

SINGER, I. (1991). Some further relations between unperturbational and pertubational dual optimization problems. Optimization. v. 22, p. 317–339.