

**Curvas de aprendizagem: jogos e modelagem matemática como estratégias metodológicas nas aulas de matemática com estudantes do ensino médio**

**Francisco Aparecido Eufrausino**

Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso, Cuiabá, MT, Brasil

**Raul Abreu de Assis**

Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Cuiabá, MT, Brasil

**Luciana Mafalda Elias de Assis**

Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Cuiabá, MT, Brasil

**RESUMO**

Este trabalho é resultado de uma pesquisa envolvendo alunos do Ensino Médio de uma escola pública do município de Sinop-MT em que o professor de Matemática propõe uma atividade com o jogo de Quebra-Cabeças desenvolvida em sala de aula fazendo-se uso da Modelagem Matemática e Curvas de Aprendizagem. Na atividade proposta foi possível conectar uma situação real executada pelos alunos por meio do jogo aos conteúdos presentes no currículo de matemática do Ensino Básico. Os alunos participaram ativamente desde a coleta de dados até a análise e interpretação de modelos que descrevem curvas de aprendizagem utilizando-se do *software* matemático Geogebra. Como resultado, concluímos que o ambiente proporcionado pela Modelagem Matemática foi capaz de tornar a aprendizagem dos alunos mais significativa, proporcionando assim, um aprendizado mais dinâmico.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Curvas de Aprendizagem. Geogebra.

**Learning curves: games and mathematical modeling as methodological strategies in mathematics classes with high school students**

**ABSTRACT**

This work is the result of a research involving high school students from a public school in the municipality of Sinop-MT in which the Mathematics teacher proposes an activity with the Pluzzle game developed in the classroom making use of Mathematical Modeling and Learning Curves. In the proposed activity, it was possible to connect a real situation performed by the students through the game to the contents present in the Basic Education Mathematics curriculum. Students actively participated from data collection to analysis and interpretation of models that describe learning curves using the mathematical software Geogebra. As a result, we conclude that the environment provided by mathematical Modeling was able to make students' learning more meaningful, thus providing a more dynamic learning.

**Keywords:** Mathematical Modeling. Learning Curves. Geogebra.

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o Ensino de Matemática tem provocado preocupações aos professores, aos alunos, aos pais e à sociedade já que vem atravessando uma grande transformação, principalmente, com o surgimento das novas tecnologias. Assim, de um modo geral, a população e consequentemente os alunos, passaram a ter acesso às mais variadas informações e, dessa forma, o trabalho com a disciplina de Matemática deve acompanhar essa nova realidade, deixando, sempre que possível, os métodos de ensino tradicionais de lado.

Segundo Oliveira (2011) o Ensino de Matemática, apesar de alguns esforços despendidos por especialistas e professores compromissados com a educação, continua com fortes traços do sistema tradicional, que dá mais valor à memorização e a repetição, e é preso à rotina que não corresponde às expectativas e ansiedade dos alunos, com pouca aplicação no cotidiano.

De acordo com o que aponta o Sistema de Avaliação do Ensino Básico (Saeb) 2019, na última avaliação nacional realizada antes da pandemia, de cada 100 estudantes que concluíram o Ensino Médio em escolas públicas brasileiras em 2019, apenas 5% alcançaram o nível esperado de conhecimentos em matemática. A maior parte dos alunos (54%) demonstrou ter domínio insuficiente da disciplina, e 41% deles aprenderam só o básico (INEP, 2021). Além disso, essa mesma pesquisa fornece dados de que 95% dos estudantes concluem a escola pública no Brasil sem o conhecimento esperado de matemática. Esses resultados são desanimadores e vários fatores podem estar vinculados a esse desempenho insatisfatório, sendo uma das principais hipóteses, a ausência de conexão das aulas com a realidade do aluno.

Segundo Batista (2020) vários estudos e pesquisas vêm apresentando indicações visando adequar e melhorar o ensino de Matemática no Brasil. Uma das propostas apresentadas na Educação Matemática para aprendizagem contextualizada e significativa de conceitos e como uma alternativa de mudança é a Modelagem Matemática.

É certo que a matemática não deve ser vista apenas como números e fórmulas, mas também como uma forma de desenvolver raciocínios e auxiliar nas tomadas de decisões. Dessa forma, a Modelagem Matemática surge como uma alternativa pedagógica positiva para a educação.

Em decorrência de seus estudos Oliveira (2011) escreve que o Ensino de Matemática deveria ser dinâmico e favorecedor do desenvolvimento do pensamento matemático com

significado prático e coerente. Um campo em que a exatidão e o resultado estivessem a serviço do raciocínio dos indivíduos, para compreender o mundo da matemática e suas aplicações no cotidiano. Assim, podemos dizer que no Ensino Médio o trabalho da matemática também envolve a compreensão e o uso da linguagem matemática com representação significativa e dinâmica.

Nesse contexto, desenvolvemos uma pesquisa que foi fundamentada em pressupostos que abarcam a Modelagem Matemática de modo que será utilizada como ferramenta para que motive os alunos e o professor durante o processo de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática do segundo ano do Ensino Médio de uma escola dada Rede Pública Estadual no Município de Sinop, Estado do Mato Grosso. Buscamos investigar como se dá o aprendizado dos estudantes do 2º ano do Ensino Médio, utilizando as curvas de aprendizagem, tópico este, presente na Modelagem Matemática.

Diante de nossa própria experiência vivenciada durante o desenvolvimento deste trabalho, estudos como este são importantes por servirem de estímulo e encorajamento aos professores. Em outras palavras, além da investigação sobre como se dá o aprendizado dos alunos, destacamos que o professor também agrega novos conhecimentos e experiências diante do desafio em incorporar atividades diferentes do que está habituado. Assim, sua formação docente será fortalecida e ao mesmo tempo instigará os alunos conectarem seu cotidiano com conteúdo presentes em suas aulas, facilitando sua compreensão dos tópicos presentes na literatura de matemática.

Este artigo é fruto da pesquisa que gerou a dissertação de mestrado, cujos detalhes podem ser consultados em Eufrausino (2023). Para apresentarmos o que foi realizado, porém de forma resumida, apresentamos o artigo em seis seções. A primeira seção trata-se desta Introdução. Na segunda, apresentamos uma Fundamentação Teórica fazendo uma revisão sobre Modelagem Matemática e apresentamos a teoria de curvas de aprendizagem, o método dos quadrados mínimos e uma breve introdução sobre o software Geogebra com direcionamento ao ajuste de curvas. Na terceira seção apresentamos nossa metodologia explicando como desenvolvemos uma aplicação em sala de aula envolvendo o tema Curvas de Aprendizagem para o Ensino Médio utilizando diferentes ferramentas matemáticas. Na quarta seção apresentamos o desenvolvimento das atividades e fazemos uma discussão dos resultados

obtidos, analisando os modelos estudados e modelando funções em sala de aula com os alunos. Finalmente, na quinta e última seção, apresentamos nossas considerações finais.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Modelagem Matemática

Quando abordamos o tema ensino e aprendizagem não podemos deixar de destacar a Modelagem Matemática, visto que sua dinâmica promove a aprendizagem motivando e despertando a curiosidade em todos os envolvidos.

Frequentemente, no processo de “ensinar” e “aprender” usamos os substantivos “ensino” e “aprendizagem”, que de certa forma, não deixa claro a vinculação de um “processo” que não se trata de algo fixo ou estático (Kubo e Botomé, 2023). Dessa forma, por se tratar de algo que se transforma continuamente, o processo de ensino e aprendizagem está presente de diferentes formas, buscando transformar positivamente os sujeitos. Nesse sentido, a construção do saber ocorre quando aprendemos a problematizar nossas próprias práticas, que quando incorporado ao contexto escolar, se faz necessário que tal prática leve o aluno a uma autorreflexão para que possa expandir sua forma de ver e agir diante das adversidades presentes em sua vida.

Assim, destacamos a importância do professor, que é o responsável por mediar esse processo possibilitando que o aluno aprenda de forma objetiva, estimulando o interesse desse, ao trazer para a sala de aula tópicos do cotidiano e relacionando-os com os saberes matemáticos presentes na literatura escolar.

Sendo o professor o mediador e facilitador no processo de aprendizagem, as práticas em sala de aula devem ser dinâmicas, proporcionando tanto para os alunos, quanto para o professor, novas habilidades, que por sua vez, devem estar em consonância com as mudanças sociais e tecnológicas.

Uma importante ferramenta que pode contribuir em favor do que acabamos de descrever são a Modelagem Matemática que pode ser usada para promover a aprendizagem, instigando os alunos a pesquisar e relacionar a Matemática apresentada nos livros didáticos às situações do seu próprio dia a dia.

O termo “modelagem” geralmente é utilizado para definir a percepção da Matemática em situações do cotidiano humano que envolvem atividades das mais variadas áreas como por exemplo: Matemática, Biologia, Astronomia, Engenharia, Economia, entre outros.

Para Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014, p.9), “a modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação sobre a realidade carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador”. Por estar diretamente relacionado com a modelagem, apresentaremos um conceito de modelo matemático ou simplesmente modelo, que pode ser definido como uma representação de um sistema real e as formas como ocorrem suas alterações. Mais especificamente,

quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo. (Bassanezi, 2011, p. 19).

A modelagem ou ato de modelar pode ser aplicado em variados problemas. Como exemplo, podemos citar a curva de aprendizagem que corresponde a uma relação, que pode ser numérica ou funcional, relativa ao efeito da experiência de um indivíduo sobre o aprendizado. Como um exemplo para descrever uma curva de aprendizagem, podemos citar o quebra-cabeça. Assim, uma pessoa que monta o mesmo quebra-cabeça seguidamente, aumentará seu nível de habilidade (tempo que leva para executar a tarefa) à medida que aumenta seu nível de experiência (número de tentativas) (Assis; Rothmund; Santos, 2022). Exploraremos mais este tema de modelagem matemática e curvas de aprendizagem nos próximos capítulos por meio de uma aplicação realizada junto aos estudantes do Ensino Básico em uma escola Estadual no município de Sinop-MT.

Para compreendermos o que é a modelagem matemática e seu papel no ensino apresentaremos os conceitos de autores que muito contribuíram para o seu avanço.

Para Biembengut e Hein (2007):

a ideia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila, produzindo um objeto. Esse objeto é um modelo. O escultor munido de material – argila, técnica, intuição e criatividade – faz seu modelo, que na certa representa alguma coisa, seja real ou imaginária. (Biembengut; Hein, 2007, p. 11).

Enquanto, para Bassanezi (2011, p. 24),

[...] a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

Um outro conceito interessante para a modelagem matemática é a apresentada por Barbosa (2001). Para este autor, a Modelagem Matemática é entendida como uma oportunidade para os alunos indagarem diferentes situações por intermédio da matemática, sem procedimentos fixados previamente, ou seja, a Modelagem Matemática no ensino “é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar por meio da matemática, situações com referência na realidade” (Barbosa, p. 3, 2001). Esse contexto corrobora com Kluber e Burak (2008), que afirmam que o

interesse dos participantes da atividade e o envolvimento dos grupos em busca de dados do ambiente [...] são capazes de dar significado, bem como desenvolver a autonomia dos participantes, de forma a torná-los agentes do processo de construção do conhecimento matemático. (Kluber; Burak, 2008, p. 20).

Para Kluber e Burak (2008), a Modelagem Matemática no contexto do Ensino Básico, é distribuída em etapas, que para os autores, são descritas como

Escolha do tema – é o momento em que o professor apresenta aos alunos alguns temas que possam gerar interesse ou os próprios alunos sugerem um tema. Esse tema pode ser dos mais variados, uma vez que não necessita ter nenhuma ligação imediata com a matemática ou com conteúdo matemáticos, e sim com o que os alunos querem pesquisar. Já nessa fase é fundamental que o professor assuma a postura de mediador, pois deverá dar o melhor encaminhamento para que a opção dos alunos seja respeitada. Pesquisa exploratória – escolhido o tema a ser pesquisado, encaminham-se os alunos para a procura de materiais e subsídios teóricos dos mais diversos, os quais contenham informações e noções prévias sobre o que se quer desenvolver/pesquisar. A pesquisa pode ser bibliográfica ou contemplar um trabalho de campo, fonte rica de informações e estímulo para a execução da proposta. Levantamento dos problemas – de posse dos materiais e da pesquisa desenvolvida, incentiva-se os alunos a conjecturarem sobre tudo que pode ter relação com a matemática, elaborando problemas simples ou complexos que permitam vislumbrar a possibilidade de aplicar ou aprender conteúdos matemáticos, isso com a ajuda do professor, que não se isenta do processo, mas se torna o “mediador” das atividades. Resolução dos problemas e o

desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema – nessa etapa, busca-se responder os problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático, que pode ser abordado de uma maneira extremamente acessível, para, posteriormente, ser sistematizado, fazendo um caminho inverso do usual, pois se ensina o conteúdo para responder às necessidades surgidas na pesquisa e no levantamento dos problemas concomitantemente. Análise crítica das soluções – etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas também a outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que, muitas vezes, são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É a etapa em que se reflete acerca dos resultados obtidos no processo e como esses podem ensejar a melhoria das decisões e ações, contribuindo dessa maneira, para a formação de cidadãos participativos, que auxiliem na transformação da comunidade em que participam. (Kluber; Burak, 2008, p. 21).

Observe que os conceitos apresentados enfatizam que a modelagem matemática é um processo que vincula a teoria à prática. No âmbito escolar, podemos dizer que aluno e professor, ao utilizá-la, procuram a compreensão da realidade que os cercam buscando transformá-la.

A Modelagem Matemática é uma metodologia de ensino que ao transformar eventos reais em linguagem Matemática promove significados para o ensino. Assim, se estabelece enquanto um processo que congrega teoria e prática, fomentando nos seus usuários a busca do entendimento da realidade que o norteia e na procura de estratégias para o agir sobre ela e modificar-se. Dessa maneira, a modelagem procura transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los analisando suas soluções na linguagem do mundo real (Bassanezi, 2011).

Ainda para Skovsmose (2008) existem diversas maneiras de implementar Modelagem no currículo. Incorporá-la na escola deve significar também o movimento do currículo de matemática para um paradigma de investigações.

## 2.2 Curvas de Aprendizagem

Uma curva de aprendizagem apresenta-se como uma ferramenta que serve para medir o desempenho de um indivíduo submetido a uma determinada tarefa manual repetitiva (Wright, 1936; Teplitz, 1991; Badiru, 1992; Argote, 1999). Em geral, só faz sentido aplicar a teoria das curvas de aprendizagem se as tarefas forem repetitivas, contínuas e idênticas. Em outras palavras, conforme uma pessoa executa a mesma tarefa repetidamente, reduzirá o tempo de

execução, já que sua familiaridade e adaptação e meios para a realização da tarefa serão otimizados (Wright, 1936; Teplitz, 1991; Dar-El, 2000).

As curvas de aprendizagem despontaram com Wright (1936) que, durante a Primeira Guerra Mundial, observou como reduzir o custo da montagem de aviões. Wright formulou uma regra prática que intitulou “curva de 80%” e tinha como finalidade reduzir custos em até 20% na produção de uma certa quantidade de aeronaves (Teplitz, 1991; Cook, 1991; Badiru, 1992; Argote, 1999; Askin, Goldberg, 2001).

As curvas de aprendizagem auxiliaram no desenvolvimento de diferentes modelos matemáticos, possibilitando assim, descrever por meio desses modelos um processo de aprendizagem. Para o escopo desse trabalho, nos restringiremos às curvas de aprendizagem univariadas, isto é, examinaremos uma variável por vez. Para tanto, apresentaremos os modelos potenciais, hiperbólicos e exponenciais, incluindo também algumas de suas variações (Anzanello; Fogliatto, 2007), levando-se em conta o contexto educacional conforme descrito em Assis, Rothmund e Santos (2022).

### 2.2.1 Modelos Potenciais

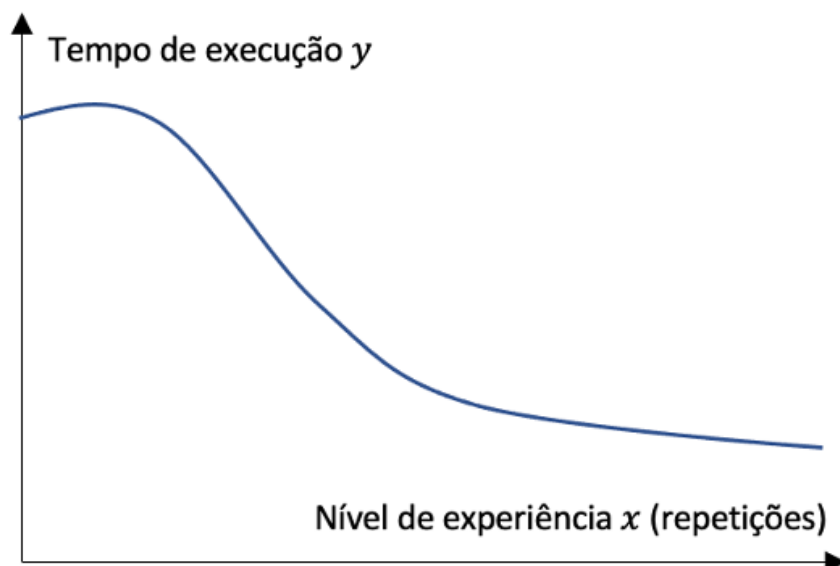
Os modelos potenciais são modificações do modelo de Wright (1936) que se baseia em uma simples função potência, cuja curva é representada por

$$y = cx^b \quad (1)$$

em que  $y$  corresponde ao nível de habilidade adquirido que está em função do nível de experiência  $x$ . Assim, o modelo fornece uma curva que avalia se há aumento da habilidade  $y$  que corresponde ao tempo de execução de uma atividade de acordo com as repetições  $x$ . Os parâmetros  $c$  e  $b$  são constantes que dependem da situação de aprendizagem, ou seja, são valores atribuídos, pelo método dos quadrados mínimos (que veremos mais adiante) que melhor ajusta a curva de acordo com os pontos dados  $(x, y)$ . O parâmetro  $c$  é um valor arbitrário e positivo, podendo ser, o tempo para executar a tarefa pela primeira vez, enquanto que o parâmetro  $b$  caracteriza a curva de aprendizagem, ou seja, corresponde ao declínio da curva de aprendizagem cujo valor deve pertencer ao intervalo  $[-1, 0]$ .

Quanto mais próximo de  $-1$  o valor de  $b$  estiver, então maior será o percentual de aprendizado e assimilação da tarefa executada (Teplitz, 1991; Badiru, 1992; Argote, 1999; Dar-El, 2000). A Figura 1 é uma interpretação para a representação gráfica do modelo de Wright.

**Figura 1:** Representação gráfica do modelo de Wright.



Fonte: Autores.

O modelo de Wright pode ser modificado de diferentes maneiras. Uma delas consiste no “modelo de Plateau”. Esse modelo soma uma constante  $a$  em (3.1), resultando em

$$y = a + cx^b \quad (2)$$

de modo que, essa constante  $a$  faz com que  $y$  tenda a  $c$ , indicando que há um limite para o nível de habilidade do aprendiz.

Outra modificação do modelo potencial proposto por Wright é o modelo de Stanford-B. Esse modelo foi desenvolvido para os casos em que o aprendiz possui prévia experiência na tarefa a ser executada. Essa experiência é quantificada pelo parâmetro  $d$  que representa o grau de experiência do aprendiz (Assis, Rothmund; Santos, 2022). Assim, o modelo resultante é dado por

$$y = c(x + d)^b. \quad (3)$$

Outro modelo potencial que é conhecido como modelo de Dejong, incorpora uma combinação de fatores na composição do tempo total. Em outras palavras, o nível de habilidade é representado pelo tempo que se leva para realizar uma dada tarefa, de modo que, uma parte é

irreduzível e outra é redutível com a experiência (Assis; Rothmund; Santos, 2022). Matematicamente, o modelo de Dejong é descrito por

$$y = c(M + (1 - M)x^b). \quad (4)$$

O parâmetro  $M$  representa a fração do tempo mínimo que é irreduzível e sua variação pertence ao intervalo  $[0,1]$ . Quando  $M$  assume valor zero, não há nível de habilidade e o modelo se reduz à equação de Wright  $y = cx^b$ . Entretanto, quando  $0 < M < 1$ , então considera-se nível de habilidade, e nesse caso, se o aprendiz possui uma experiência previa da tarefa a ser executada ao modelo de Dejong, obteremos a curva “S” bastando acrescentar o fator de experiência prévia  $d$  de modo que o modelo é dado pela equação

$$y = c(M + (1 - M)(x + d)^b) \quad (5)$$

que é a união dos modelos de Dejong e Stanford-B.

### 2.2.2 Modelo Hiperbólico

Uma formulação da curva de aprendizagem foi proposta por Mazur e Hastie (1978), cuja forma matemática é dada por uma curva hiperbólica

$$y = k \frac{x}{x+r} \quad (6)$$

em que  $k$  é o máximo de desempenho a ser atingido e  $r$  indica a taxa de aprendizado (Nembhard; Uzumeri, 2000a). Entretanto, estamos interessados no caso em que, ao executarmos uma determinada tarefa seu tempo de realização seja decrescente. Para isso utilizaremos a adaptação apresentada em (Assis, Rothmund E Santos, 2022), que inclui o parâmetro  $A$  à equação (3.6). Assim, o modelo é dado por

$$y = A - k \frac{x}{x+r} \quad (7)$$

em que os parâmetros  $A$ ,  $k$  e  $r$  são constantes positivas.

### 2.2.3 Modelos Exponenciais

Os modelos exponenciais representam as curvas de aprendizagem que têm natureza exponencial, de modo que, os primeiros estudos sobre tais modelos se devem a Knecht (1974), que propôs aprimorar a modelagem de processos com maior número de repetições combinando funções exponenciais e potenciais (Anzanello; Fogliatto, 2007).

Seus parâmetros são diferentes quando comparados aos modelos potenciais, pois fornecem mais informações a respeito do processo de aprendizagem (Nembhard; Uzumeri, 2000a). O modelo exponencial é dado pela equação

$$y = cx^be^{mx} \quad (8)$$

em que  $m$  é uma segunda constante e os demais parâmetros são idênticos aos modelos anteriores.

Dentre os modelos exponenciais vamos considerar em nosso trabalho o modelo exponencial de três parâmetros, o exponencial de dois parâmetros e o de tempo constante.

O modelo exponencial de três parâmetros é dado por

$$y = k(1 - e^{-(x+d)/r}) \quad (9)$$

em que  $y \geq 0$  corresponde ao nível de habilidade (tempo de execução) e  $x \geq 0$  o nível de experiência (número de repetições de uma dada tarefa). O parâmetro  $k \geq 0$  é o máximo de desempenho a ser atingido e  $r \geq 0$  indica a taxa de aprendizado. Finalmente, o parâmetro  $d \geq 0$  representa a experiência prévia do aprendiz. Entretanto, para Mazur e Hastie (1978), o modelo exponencial apresentado em (9) não fornece um resultado satisfatório quando as tarefas a serem executadas são mais complexas. Ainda assim, o modelo gera bons resultados quando o aprendiz apresenta experiência prévia.

Ao excluirmos do modelo (9) a experiência prévia do aprendiz, representada pelo parâmetro  $d$ , obtemos o modelo exponencial de dois parâmetros. De acordo com Mazur e Hastie (1978), o modelo de dois parâmetros é menos eficiente se comparado com o modelo de três parâmetros.

Finalmente, temos o modelo exponencial de tempo constante. Este modelo foi desenvolvido por Towill (1990) e sua estrutura é parecida com a curva exponencial apresentada no modelo de três parâmetros. A equação para este modelo é dada por

$$y = y_M + (y_0 - y_M)e^{-kx} \quad (10)$$

em que  $y_M$  é o nível de habilidade (máximo/mínimo),  $y_0$  é o desempenho inicial,  $k \geq 0$  é a velocidade do aprendizado e  $x$  o número de repetições. A adaptação resultante no modelo (10) possibilita a determinação do tempo demandado para se obter determinado nível de desempenho.

Até aqui, foram apresentadas diferentes funções para descrever curvas de aprendizagem. A Seguir, apresentaremos e discutiremos ferramentas necessárias para que seja possível ajustar as curvas de aprendizagem a dados coletados que resultam de uma aplicação realizada junto aos alunos do Ensino Médio. Para tanto, faremos o uso do *software* matemático Geogebra para ilustrar tais ajustes graficamente.

#### 2.2.4 Ajustes de curvas: o método dos mínimos quadrados e o $R^2$

Para realizar os ajustes dos modelos que estudamos até aqui, adotaremos como metodologia a regressão por meio dos quadrados mínimos fazendo uso do *Software* Geogebra, produzindo assim, o ajuste entre dados realísticos e a função, que em nosso caso, correspondem aos modelos de Wright, Plateau, Stanford-B, Dejong, a Curva “S”, Hiperbólico e Exponencial.

Para realizar o ajuste de curvas a um conjunto de dados, um dos métodos mais simples é o dos quadrados mínimos (Ruggiero; Lopes, 1997; Brown, 2001). Este método busca minimizar a soma dos erros ao quadrado dado por

$$E = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2. \quad (11)$$

Para entendermos melhor, inicialmente representamos por  $f(x)$  o modelo que será ajustado aos dados coletados. Queremos que  $f(x_i) \approx y_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , em que  $y_i$  representa os dados coletados (realísticos). Em outras palavras, deseja-se que  $f(x_i)$  e  $y_i$  sejam valores muito próximos, sendo a distância entre eles a menor possível. Para que isso seja

possível, devemos tomar a distância  $d_i = (f(x_i) - y_i)^2$ . Dessa forma, para minimizar o erro  $E$  do conjunto de parâmetros  $f(x)$ , basta calcular a soma dos quadrados de  $(f(x_i) - y_i)$ , sendo esta, representada pela equação (11).

De maneira resumida, o erro total  $E$  é uma função dos parâmetros da função  $f(x)$  que é usada para descrever a curva de aprendizagem. Por ser inviável obter  $E$  analiticamente, recorreremos a métodos numéricos fazendo o uso do *software* matemático Geogebra que será apresentado a seguir.

Apresentamos ainda, a medida de ajuste R-quadrado. Isso se deve ao fato de que ajustaremos diferentes curvas de aprendizagem a uma tabela de dados coletados e, nesse sentido, é interessante realizar uma comparação entre os modelos potenciais, hiperbólicos e exponenciais a fim de investigar qual dentre esses modelos melhor descreverá o conjunto de dados coletados.

O Coeficiente de Determinação, ou seja, a medida de ajuste R-quadrado denotado por  $R^2$ , dado por Bussab e Morettin (1986),

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2}, \quad (12)$$

em que  $n$  corresponde ao número (quantidade) de dados coletados,  $f(x_i)$  representa os valores dos modelos ajustados em cada instante  $i$ . Além disso,  $y_i$  corresponde aos dados coletados no instante  $i$  e finalmente,  $\bar{y}$  representa a média dos dados coletados  $y_i$  no instante  $i$ .

Observe que, o denominador  $D = \sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2$  da equação (3.12), trata-se de uma medida que corresponde ao erro cometido por um modelo que é constante e igual a média dos valores, enquanto que o numerador  $N = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$ , representa uma medida do erro total cometido pelo modelo proposto pela função  $f(x)$ .

Assim, podemos dizer que  $R^2$  representa o percentual da variância que é explicado pelo modelo, visto que  $D$  é proporcional à variância dos dados coletados. Isso significa que, quanto mais próximo o  $R^2$  estiver de 1, então menor será o erro cometido pelo modelo em relação à variância dos dados coletados.

Como ilustração para o que acabamos de afirmar, suponha obter  $R^2 = 0.7$ . Isso indica que a medida do erro do modelo é de 30% da medida do erro cometido pelo modelo constante.

### 2.2.5 Representação gráfica dos ajustes de curvas: uma breve introdução sobre *software* Geogebra

Atualmente é bastante comum associar o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) descrevem habilidades e competências na área de Ciências e Matemática destacando a importância das TICs no processo de construção do conhecimento (Brasil, 2000).

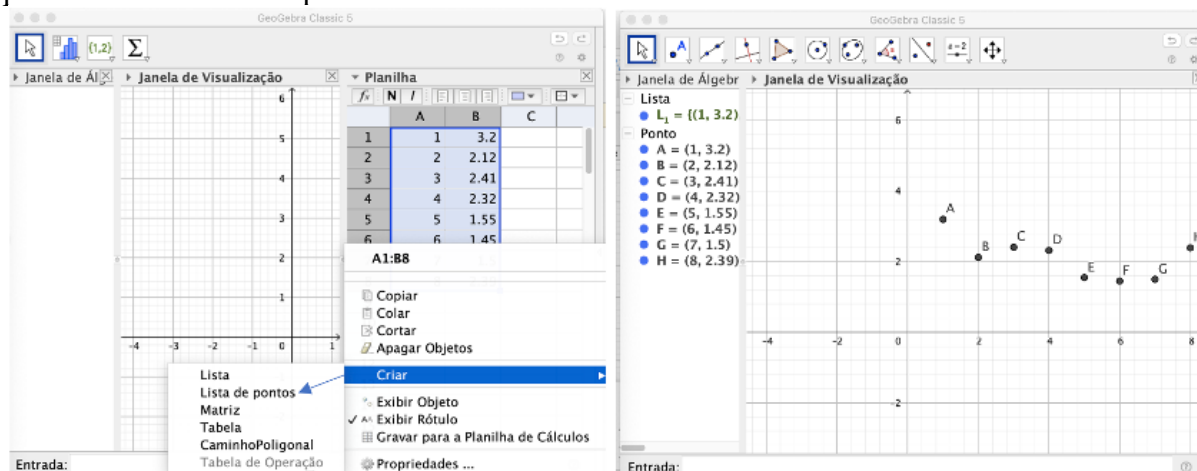
Dentro desse contexto, podemos destacar o *software* matemático como uma ferramenta bastante útil para proporcionar a compreensão de determinados tópicos em matemática, ampliando o entendimento dos alunos por oferecer cálculos e visualizações geométricas vinculando a prática ao abstrato.

Versões atualizadas do *software* Geogebra, podem ser obtidas diretamente da internet em: <http://www.geogebra.org/>. Utilizamos aqui, a versão clássica 5.0.426.0-d.

Nosso objetivo, consiste em utilizar o Geogebra para ajustar curvas a dados coletados, conforme descrito na próxima Seção. Conforme dito anteriormente, este *software* é bastante intuitivo, de modo que, faremos uma breve apresentação em como utilizá-lo para o ajuste de curvas.

Inicialmente, após abrir o programa, clicamos em Exibir -> Planilha, visto que precisamos da ferramenta “Planilha”, que serve para digitar os dados coletados. Após a digitação dos dados, basta selecioná-los na planilha, clicar com o botão direito do mouse escolhendo “Criar -> Lista de pontos” que serve para criarmos uma lista de pontos com esses dados, conforme ilustra a Figura 2.

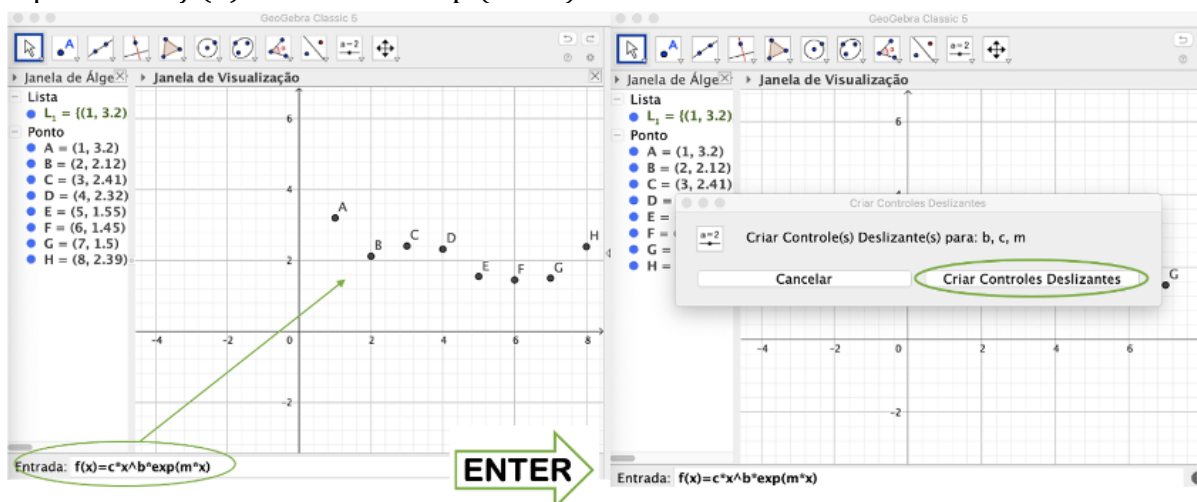
**Figura 2:** Captura de tela do *software* Geogebra para ilustrar como criar uma lista de pontos a partir da ferramenta de planilha utilizando dados.



Fonte: autores

Para ilustrarmos como funciona o ajuste de curvas aos dados da Figura 2, escolhemos de maneira aleatória uma função. Por exemplo, digitando na barra de entrada o comando “ $f(x) = c * x^b * \exp(m * x)$ ” que corresponde ao modelo exponencial (3.8), ao pressionarmos “enter” obtemos uma função de ajuste exponencial. Entretanto, observe que, aparece uma janela com a opção de inserir os “controles deslizantes” para os parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $m$  do modelo conforme ilustra a Figura 3.

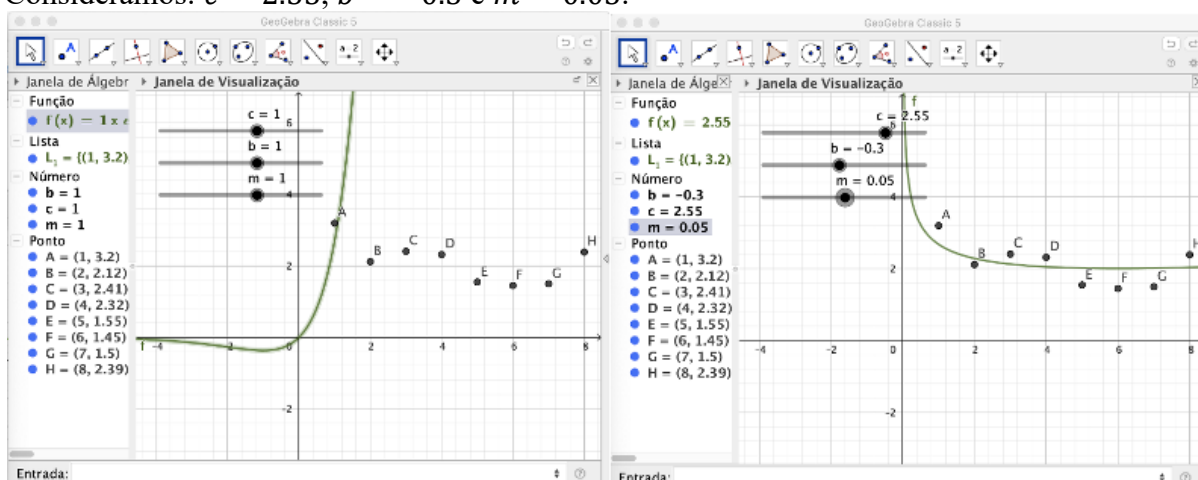
**Figura 3:** Captura de tela do *software* Geogebra para ilustrar como inserir o modelo exponencial “ $f(x) = c * x^b * \exp(m * x)$ ” e os controles deslizantes.



Fonte: Autores.

Os controles servem para ajustar os parâmetros de maneira manual, o que será de grande ajuda, pois funciona como um “chute inicial”, a fim de obtermos o melhor ajuste de curvas dos quadrados mínimos. Realizando alguns ajustes manuais nos “controles deslizantes”, percebemos, que o modelo possui um bom ajuste ao tomarmos  $c = 2.55$ ,  $b = -0.3$  e  $m = 0.05$ . Veja a Figura 4.

**Figura 4:** Captura de tela do *software* Geogebra para ilustrar a curva do modelo exponencial “ $f(x) = c * x^b * \exp(m * x)$ ” e essa mesma curva após ajustar os controles deslizantes. Consideramos:  $c = 2.55$ ,  $b = -0.3$  e  $m = 0.05$ .

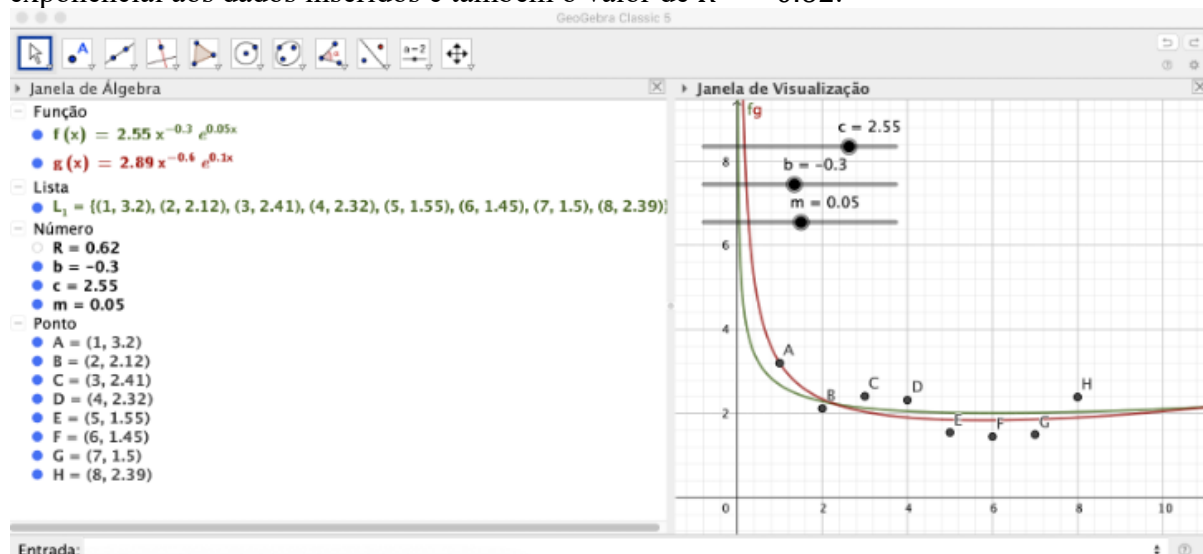


Fonte: Autores.

O próximo passo, consiste em digitar no comando de entrada “ $g(x) = \text{Regressão}(L_1, f)$ ”. Observe que, “ $L_1$ ” representa a lista de pontos criados e “ $f$ ” a função a ser ajustada. Em nosso caso, obtivemos uma resposta para “ $g(x) = 2.89x^{-0.06}e^{0.1x}$ ”, que é muito próxima da função “ $f(x)$ ”.

Para finalizarmos, exibimos o valor de  $R^2$ , sendo este, por meio do comando “ $R = R\text{Quadrado}(L_1, g)$ ”, em que “ $L_1$ ” identifica a lista de pontos e “ $g$ ” a função ajustada com os parâmetros ótimos. Veja a Figura 5.

**Figura 5:** Captura de tela do *software* Geogebra para ilustrar o ajuste de um modelo exponencial aos dados inseridos e também o valor de  $R^2 = 0.62$ .



Fonte: Autores.

### 3 METODOLOGIA

As curvas de aprendizagem podem fornecer resultados satisfatórios para o trabalho do professor, visto que reforçam a importância da revisão e da repetição de algo que se deseja aprender. Com a finalidade de se obter dados de um processo de ensino e aprendizagem, decidimos aplicar a teoria das curvas de aprendizagem em duas turmas do segundo ano do Ensino Médio totalizando 16 participantes. A aplicação aconteceu em uma escola pública do município de Sinop, no Estado de Mato Grosso. Vale ressaltar que os objetivos principais dessa aplicação consistem em aprimorar o conhecimento do professor para que possa tornar-se um educador versátil, seguro e podendo conectar seus ensinamentos com situações reais do mundo utilizando diferentes recursos e fazendo com que o aprendizado dos alunos em sala de aula torne-se dinâmico e desafiador e, no que tange os alunos destacamos a investigação e observação do comportamento e interesse durante todo o processo de aprendizado. Em outras palavras, buscamos compreender quais são os ganhos pedagógicos com as atividades propostas e principalmente, analisar os resultados que são apresentados durante todo o processo por meio das interações e atuação dos alunos em sala de aula.

### 3.1 Modelagem Matemática e Curvas de Aprendizagem: uma aplicação no Ensino Médio

Utilizamos como fundamentação teórica para a aplicação executada a Modelagem Matemática, já que o aluno é o principal executor da tarefa a ser modelada, que será posteriormente, analisada utilizando a teoria das curvas de aprendizagem. Realizamos um experimento utilizando o jogo de quebra-cabeças que teve como objetivo fazê-los compreender como um problema real (nesse caso o jogo) vincula-se aos conceitos matemáticos formais. Para esta atividade escolhemos um quebra cabeça denominado “Arca de Noé” contendo 30 peças, em que o aluno deve montar o quebra-cabeça por oito vezes consecutivas embaralhando as peças entre uma montagem e outra, anotando em cada rodada tempo gasto, conforme ilustrado na Figura 6.

**Figura 6:** Quebra-cabeça “Arca de Noé” contendo 30 peças utilizado no experimento para coleta de dados.



Fonte: Autores.

Para a organização da atividade proposta, elaboramos um roteiro explicativo para os alunos consistindo em:

- \* Explicar a dinâmica em como será realizado o experimento envolvendo o quebra-cabeças;
- \* Organizar grupos de alunos para execução dos jogos;
- \* aplicar tarefas consistindo da execução do jogo com os alunos e coleta de dados;
- \* Tabular os dados coletados;
- \* Organizar os equipamentos necessários;
- \* Modelar funções e discutir ajuste de curvas de aprendizagem com os alunos.

Inicialmente, organizamos os grupos em sala de aula, considerando o número de alunos matriculados que estavam frequentando as aulas totalizando 6 grupos de 8 alunos.

Cada grupo faria uma das atividades propostas, de modo que, enquanto quatro alunos de um grupo realizavam as tarefas por oito vezes consecutivas seguindo o mesmo padrão da primeira jogada, os outros quatro integrantes (não necessariamente do mesmo grupo) fiscalizavam e anotavam os tempos de realização da atividade em cadernos. Os grupos foram denominados de grupos 1, 2, 3, 4. Para organizar a execução das tarefas elaboramos tabelas para organizar os nomes dos integrantes de cada grupo. As aplicações das tarefas ocorreram no dia 20/10/2022.

Como a duração da aula é de uma hora e quarenta e cinco minutos, consideramos no máximo cinco minutos para a execução de cada tarefa distribuídas em quatro rodadas durante a aula.

Para entendermos melhor, se considerarmos a primeira rodada que ocorreu das 9:15 às 9:35, os alunos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  do grupo  $G_1$ , executaram a tarefa do quebra-cabeças e os alunos  $A_1, A_2, A_3, A_4$  do grupo  $G_3$ , realizaram as anotações dos tempos gastos em cada uma das oito repetições em um caderno. Ao mesmo tempo, os demais alunos  $A_5, A_6, A_7, A_8$  do grupo  $G_1$  executaram a tarefa do quebra-cabeças de modo que, os alunos  $A_5, A_6, A_7, A_8$  do grupo  $G_3$ , realizaram as anotações dos tempos gastos em cada uma das oito repetições em um caderno.

De maneira análoga, isso ocorreu nesse mesmo horário envolvendo os grupos  $G_2$  e  $G_4$  ao executarem as mesmas tarefas.

Feito isso, recolhemos os dados para tabular em uma planilha eletrônica, cuja digitação foi feita pelo professor pesquisador fora do horário de aula, já que o tempo em sala de aula é muito reduzido para deixar essa tabulação a cargo dos alunos.

Com os dados todos digitados, o próximo passo consistiu em modelar juntamente com os alunos funções conhecidas fazendo o ajuste das funções aos dados coletados e discutindo os resultados por meio das curvas de aprendizagem obtidas. Essa parte da pesquisa foi realizada nos dias 17/11/2022.

Para a realização desta última parte da atividade, utilizamos o Chromebook, sendo este, fruto de recursos governamentais para a qualificação e a utilização da tecnologia no ensino às escolas da rede Estado de Mato Grosso. Este equipamento é um notebook idealizado pela empresa Google contando com o sistema operacional Chrome OS, sendo equipado com entrada USB e drive óptico, de modo que é possível utilizar dispositivos e armazenamento como pendrives e HDs externos, bem como reproduzir CDs e DVDs. Seu tamanho é menor e sua tela varia entre 11 e 15 polegadas.

É possível acessar a internet no Chromebook. Ele possui um sistema de login integrado com as contas educacionais de professores e alunos, sendo disponibilizados para atividades pedagógicas sempre que necessário. Também é possível acessar os serviços on-line de todas as ferramentas da plataforma Google Sala de Aula e das ferramentas do Google for Education.

Iniciamos com a inserção dos dados na planilha do Geogebra criando uma lista de pontos, para em seguida, inserir os modelos matemáticos que descrevem curvas de aprendizagem ajustando-os aos dados e calculando o  $R^2$ . Como o tempo é muito reduzido, optamos por trabalhar com apenas dois modelos, sendo um potencial e outro exponencial.

## 4 DESENVOLVIMENTO

Nessa Seção apresentamos como se deu o desenvolvimento das atividades fazendo ilustrando os resultados gráficos que ilustram as curvas de aprendizagem dos modelos potenciais, hiperbólicos e exponenciais, e ainda, fazemos uma discussão sobre os resultados gerais das atividades que os alunos executaram utilizando os Chromebooks.

### 4.1 Modelando funções conhecidas em sala de aula com o uso do Chromebook utilizando os dados coletados da atividade de Quebra-Cabeça

O objetivo principal desta tarefa, consistiu em avaliar o interesse dos alunos e o respectivo desempenho ao executarem as mesmas tarefas um certo número de vezes, avaliando

a compreensão desses alunos em relacionarem as atividades à Modelagem Matemática por meio da interpretação dos gráficos obtidos da representação geométrica no Geogebra de algumas funções conhecidas pelos alunos (linear, quadrática e exponencial).

Iniciamos o trabalho com os alunos de modo que duas funções foram modeladas obtendo um ajuste de curvas. Observamos uma participação mais ativa dos alunos na construção e reforço do conhecimento prévio e adquirido sobre as curvas de aprendizagem e do uso do software matemático (Geogebra). O fato de que os dados coletados por eles mesmo serem objeto de investigação foi muito motivador.

O Quadro 1 apresenta os dados coletados do 2º ano e, para se torne mais didático, cada linha da tabela do corresponde a um participante denotado por  $A_i$  com  $i = 1, 2, \dots, 16$  e cada coluna o número de tentativas (repetições) de execução da tarefa, sendo este denotado por  $R_j$  com  $j = 1, 2, \dots, 8$ . Também calculamos  $M_j = \sum_{i=1}^{n=16} \frac{A_i}{n}$ ;  $j = 1, 2, \dots, 8$ , que corresponde à média aritmética dos tempos obtidos por cada aluno  $A_i$  em cada tentativa  $R_j$ . O cálculo da média aritmética dos tempos de todos os alunos em cada repetição, foi calculada com o objetivo de suavizar possíveis variações aleatórias e entre os alunos. Resumindo, o Quadro 1 basicamente possui a combinação de duas informações primordiais, sendo:  $M_j = y$  (média dos tempos de execução da tarefa/nível de habilidade) em cada instante  $R_j = x$  (número de repetições/nível de experiência).

**Quadro 1:** Dados produzidos dos tempos obtidos por cada aluno participante na atividade do quebra-cabeça “Arca de Noé” (montar o quebra-cabeça de 30 peças no menor tempo possível). Legenda:  $A_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, 16$  corresponde aos alunos participantes do 2º ano;  $R_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, 8$  trata-se do número de repetições da execução da tarefa;  $M_j = \sum_{i=1}^{n=16} \frac{A_i}{n}$ ;  $j = 1, 2, \dots, 8$ , corresponde à média aritmética dos tempos obtidos por cada aluno  $A_i$  em cada tentativa  $R_j$ .

| Tentativa<br>Aluno                          | Tempo (minutos) |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------------------------------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                             | $R_1$           | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ | $R_7$ | $R_8$ |
| $A_1$                                       | 4.37            | 2.27  | 1.55  | 2.50  | 2.57  | 2.38  | 1.58  | 1.57  |
| $A_2$                                       | 3.01            | 3.02  | 2.08  | 1.58  | 1.39  | 1.28  | 1.35  | 1.11  |
| $A_3$                                       | 6.04            | 4.16  | 3.32  | 3.25  | 3.59  | 2.52  | 3.59  | 3.45  |
| $A_4$                                       | 4.12            | 3.04  | 2.25  | 2.29  | 2.17  | 1.52  | 2.01  | 1.35  |
| $A_5$                                       | 5.57            | 5.44  | 4.06  | 3.52  | 2.56  | 4.02  | 3.31  | 3.02  |
| $A_6$                                       | 3.42            | 3.05  | 2.42  | 2.30  | 3.05  | 2.27  | 1.40  | 1.56  |
| $A_7$                                       | 6.08            | 4.00  | 3.46  | 5.02  | 3.14  | 3.49  | 4.12  | 2.31  |
| $A_8$                                       | 6.55            | 6.03  | 3.48  | 3.03  | 4.05  | 3.22  | 3.44  | 2.53  |
| $A_9$                                       | 9.40            | 7.36  | 4.18  | 1.48  | 3.01  | 2.06  | 3.08  | 1.50  |
| $A_{10}$                                    | 3.07            | 3.55  | 2.42  | 1.12  | 2.32  | 2.30  | 2.49  | 1.19  |
| $A_{11}$                                    | 2.43            | 3.13  | 3.57  | 2.32  | 1.39  | 3.56  | 1.04  | 2.25  |
| $A_{12}$                                    | 2.53            | 3.09  | 2.01  | 2.00  | 2.13  | 2.12  | 1.32  | 3.05  |
| $A_{13}$                                    | 4.30            | 4.15  | 3.40  | 2.46  | 2.44  | 2.40  | 2.30  | 2.44  |
| $A_{14}$                                    | 7.29            | 7.03  | 4.50  | 3.38  | 5.01  | 5.28  | 4.20  | 2.45  |
| $A_{15}$                                    | 4.37            | 3.02  | 3.32  | 2.29  | 2.56  | 2.27  | 4.12  | 3.44  |
| $A_{16}$                                    | 3.02            | 3.32  | 2.29  | 2.56  | 2.27  | 3.49  | 1.35  | 1.57  |
| $M_j; j =$<br>$1, 2, \dots, 8$<br>(minutos) | $M_1$           | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ | $M_8$ |
|                                             | 4.72            | 4.10  | 3.01  | 2.56  | 2.72  | 2.76  | 2.54  | 2.17  |

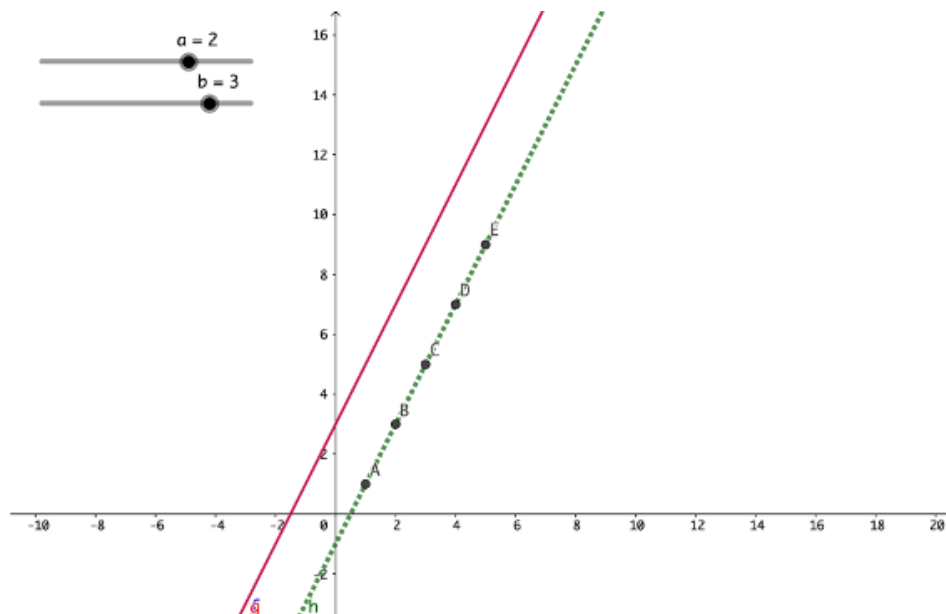
Fonte: Autores.

Após coletados os dados que correspondem ao tempo de montagem do quebra-cabeças por oito vezes consecutivas por cada um dos alunos de cada grupo, procedemos a análise desses dados em sala de aula juntamente com os alunos. A seguir descrevemos passo a passo de como a atividade foi realizada em ambas as turmas. Imprevistos também ocorreram durante o

processo de execução da atividade, que não descreveremos aqui, visto que é uma particularidade das condições de espaço físico e humano da escola, professor e alunos.

- Passo 1: funcionalidade dos equipamentos: ligar e fazer o login dos Chromebooks que foram distribuídos aos alunos (individualmente e em duplas) e projetar no quadro com o uso do Datashow e notebook os dados coletados e também o *software* Geogebra.
- Passo 2: digitar os dados no Geogebra: projeção das tabelas contendo os dados na planilha do Geogebra, criando uma lista de pontos.
- Passo 3: Ajuste de funções conhecidas: os alunos iniciaram os ajustes usando a função  $f(x) = 2x + 3$  do primeiro grau. Também foi inserida a função genérica  $g(x) = ax + b$  criando controles deslizantes para os parâmetros  $a$  e  $b$  pertencente ao intervalo  $[-10,10]$ , considerando um incremento de 0.01 para poder ajustar a função  $g(x) = ax + b$  de tal forma que ficasse sobreposta à função  $f(x) = 2x + 3$ . Conceitos sobre função afim e linear foram explicados por meio das simulações feitas pelos alunos nesse momento. Após os alunos explorarem as possibilidades, passamos para o ajuste de curvas, realizando a regressão por meio do comando “REGRESSÃO( $L_1, g(x)$ )” em que,  $L_1$  corresponde a lista de pontos digitados  $(-1,1)$ ,  $(0,3)$ ,  $(1,5)$ ,  $(2,7)$ ,  $(3,9)$ . O ajuste de  $g(x)$  resultou no modelo  $h(x) = 2x + 3$  com  $R^2 = 1$ . A Figura 7 ilustra o que foi feito. Após explicar o significado do ajuste e do  $R^2$  repetimos a atividade para a função quadrática.

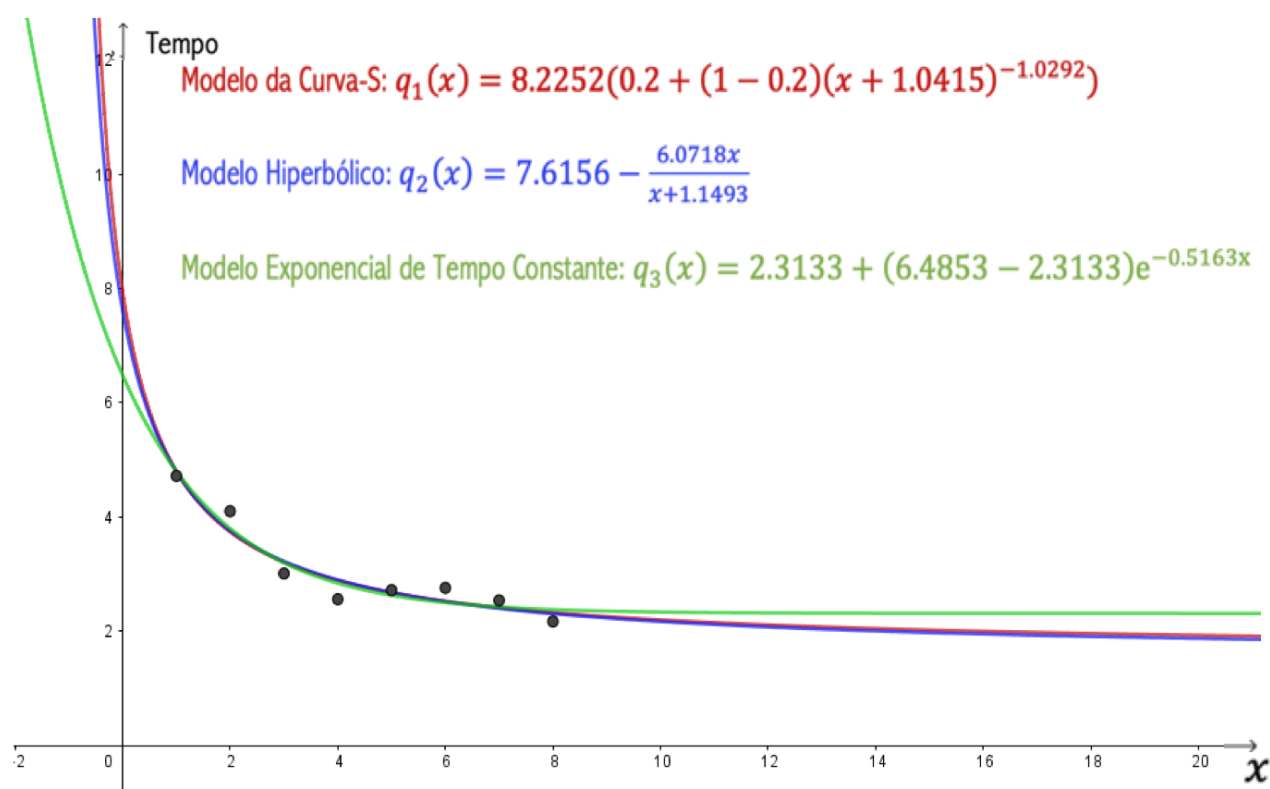
**Figura 7:** Simulação feita pelos alunos do 2º ano realizando ajuste de curvas para uma função do primeiro grau.



**Fonte:** Autores.

- Passo 4: Modelando os dados do Quebra-cabeça: após os alunos compreenderem o significado de ajustes de curvas e do  $R^2$  passamos para a última parte da aplicação. Os alunos criaram um arquivo no Geogebra e nele foram digitados os dados coletados (médias dos tempos que cada aluno utilizou para a montagem do quebra-cabeça por oito vezes consecutivas). Após digitar os dados e criar os pontos, exploramos algumas das funções presentes no Capítulo 3 que descrevem as curvas de aprendizagem, realizando o ajuste de curvas e calculando o  $R^2$ .
- Passo 5: Discussão dos resultados: finalizamos com uma discussão sobre as curvas de aprendizado buscando compreender qual dentre elas apresentou melhor resultado. Utilizamos as funções da Curva-S, Hiperbólica e Exponencial de tempo constante, conforme ilustra a Figura 8. Observe que o modelo Exponencial de Tempo Constante apresentou o melhor ajuste já que seu  $R^2$  foi o maior dentre os três modelos. E quanto ao valor assintótico que corresponde ao menor tempo possível em que os alunos podem montar o quebra-cabeça, o modelo Hiperbólico apresentou o menor tempo dado por  $y_{\infty} = 1.5438$ .

**Figura 8:** Ajuste do modelo da Curva-S,  $q_1(x) = 1.25(0.2 + (1 - 0.2)(x + 0.4)^{-0.65})$ , cuja função de regressão é dada por  $q_1^*(x) = 8.2252(0.2 + (1 - 0.2)(x + 1.0415)^{-1.0292})$  com  $R^2 = 0.9289$  e valor assintótico  $y_\infty = 1.64504$ . Ajuste do modelo Hiperbólico  $q_2(x) = 2 - \frac{1.3x}{x+0.75}$ , cuja função de regressão é dada por  $q_2^*(x) = 7.6156 - \frac{6.0718x}{x+1.1493}$  com  $R^2 = 0.9291$  e valor assintótico  $y_\infty = 1.5438$ . Ajuste do modelo Exponencial de Tempo Constante  $q_3(x) = 2.6 + (3.05 - 2.6)e^{2.85x}$ , cuja função de regressão é dada por  $q_3^*(x) = 2.3133 + (6.4853 - 2.2133)e^{-0.5163x}$  com  $R^2 = 0.9355$  e valor assintótico  $y_\infty = 2.3133$ . O eixo  $x$  representa o índice de tentativas para montar o quebra-cabeça e o eixo  $y$  corresponde à média do tempo para a execução da tarefa.



Fonte: Autores.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa tivemos a oportunidade de vivenciar a aprendizagem e o ensino por meio de uma proposta diferente do que se apresenta o ensino tradicional. Ao trabalharmos com curvas de aprendizagem, pudemos observar aspectos importantes da Modelagem Matemática. Durante a aplicação de técnicas, como por exemplo, a coleta e tabulação de dados, ajuste de curvas e o

uso do *software* matemático Geogebra para interpretar gráficos envolvendo funções que descrevem as curvas de aprendizagem, foi notório envolvimento e motivação dos alunos. Para muitos, foi a primeira vez em que participaram de uma atividade vinculando o conteúdo formal a um problema real (que em nosso caso foi o jogo de quebra-cabeças).

Durante todo o processo de aplicação das atividades propostas, foi possível envolver ativamente os alunos, refletindo em como aconteceu de maneira natural em sala de aula, a autonomia, motivação individual e em grupo. Essa participação ativa dos alunos proporcionou um aprendizado significativo, já que a participação do aluno ocupou uma posição diferenciada no processo de ensino e aprendizagem.

Além das técnicas que tivemos a oportunidade de aprender e as interações com os alunos, que se desenvolveram no decorrer das aplicações, também fizemos uso de equipamentos e internet fornecidos pela escola, e isso mostra a importância de escolas terem equipamentos que acompanhem o desenvolvimento tecnológico, para que o mesmo possa ser inserido em sala de aula.

Acreditamos que, práticas como essa que realizamos, deva fazer parte de forma mais efetiva em sala de aula, pois sem dúvidas, contribui para o crescimento dos alunos e também do professor que, sendo um mediador do processo de aprendizado, também deve ampliar seus conhecimentos para ocupar esse papel.

Vale destacar que, o professor deve prever incidentes que podem ocorrer durante todo o processo de aplicação de uma atividade envolvendo matemática. Destacamos aqui, o cuidado que se deve ter em relação ao tempo para organização e execução da atividade, a verificação do espaço escolar, ou seja, se é apropriado e quais seriam as alternativas para torna-lo apropriado, principalmente para se trabalhar com grupos de alunos e ainda, resguardar um tempo no final da atividade para fazer discussões sobre os resultados, principalmente na parte de compreensão do todo do que foi desenvolvido, ou seja, verificar se o aluno foi capaz de agregar o conhecimento proposto por meio da atividade de modelagem.

## REFERÊNCIAS

ANZANELLO, M. J., FOGLIATTO, F. S., Curvas de aprendizado: estado da arte e perspectivas de pesquisa. **Gest. Prod.**, São Carlos, v.14, n.1, p. 109-123, jan-abr., 2007.

ARGOTE, L. **Organizational Learning: Creating, Retaining and Transferring Knowledge**. New York: Springer-Verlag, 1999.

ASKIN, R.; GOLDBERG, J. **Design and Analysis of Lean Production Systems**. New York: John Wiley & Sons, 2001.

ASSIS, R. A., ROTHMUND, C., SANTOS, J. G. Curvas de Aprendizagem. IN: ASSIS, L. M., MALAVAZI, M. C., PETRY, P. P. C., ASSIS, R. B., PAZIM, R. (org.). **Projetos e Modelagem Matemática no Ensino Superior**. 1ª Edição. Belém: RFB Editora, 2022. Disponível em: [https://d545c17b-f3d5-41c9-bf28-a48acf4c19a8.filesusr.com/ugd/baca0d\\_9ebc99863dda4ffd9aa85fbe97441227.pdf](https://d545c17b-f3d5-41c9-bf28-a48acf4c19a8.filesusr.com/ugd/baca0d_9ebc99863dda4ffd9aa85fbe97441227.pdf). Acesso em: 17/01/2023.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: **REUNIÃO ANUAL DA ANPED**, 24., 2001, Caxambu. Anais. Rio de Janeiro: ANPED, 2001.

BADIRU, A. B. **Computational Survey of Univariate and Multivariate Learning Curve Models**. IEEE Transactions on Engineering Management, New Jersey, v. 39, n. 2, p. 176-188, 1992.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BATISTA, M. da S. **Princípio fundamental da contagem e modelagem matemática nos anos finais do ensino fundamental**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática e Estatística. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre, 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220402>. Acessado em: 12 set. 2022.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. **Modelagem Matemática**. Universidade Federal de Uberlândia, 2014. Acesso em 05/01/2023. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25315/1/Modelagem%20Matem%C3%A1tica.pdf>

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

BROWN, A. M. A. **Step-by-step guide to non-linear regression analysis of experimental data using a Microsoft excel spreadsjeett**. Computer Methods and Programs in Biomedice, Champaing, v. 65, n. 7, p. 191-200, 2001.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. São Paulo: Atual, 1986.

COOK, J. A. Competitive Model of the Japanese Firm. **Journal of Policy Modeling**, New York, v. 13, n. 1, p. 93-114, 1991.

DAR-EL, E. **Human Learning: from Learning Curves to Learning Organizations**, New York: Springer, 2000.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório de resultados do Saeb 2019: volume 2: 2º ano do ensino fundamental** [recurso eletrônico] Brasília, DF: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2021. Disponível em: [https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/saeb/2019/resultados/relatorio\\_de\\_resultados\\_do\\_saeb\\_2019\\_volume\\_2.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_2.pdf). Acessado em: 12 set. 2022.

EUFRAUSINO, F. A. **Aprendizagem e Ensino por meio da Modelagem Matemática**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat), Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado de Matogrosso, Sinop, 2023.

KLUBE, T. E.; BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

KUBO, O. M.; BOTOMÉ, S. P. **Ensino-aprendizagem: uma interação entre dois processos comportamentais**. Acesso em 04/01/2023. Biblioteca virtual de periódicos UFPR. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/psicologia/article/view/3321/2665>. Acesso em: 12/01/2023.

MAZUR, J. E.; HASTIE, R. Learning as Accumulation: a reexamination of the Learning Curve. **Psychological Bulletin**, Washington DC, v. 85, n. 6, p. 1256-1274, 1978.

NEMBHARD, D. A.; UZUMERI, M. V. Na Individual-Based Description of Learning within an Organization. **IEEE Transactions on Engineering Management**. New Jersey, v.47, n. 3, p. 370-378, 2000a.

OLIVEIRA, C. A. de. O ensino-aprendizagem da matemática no ensino médio voltado para o cotidiano. **II CNEM - Congresso Nacional de Educação em Matemática**. ULBRA, 2011. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC69.pdf>. Acessado em: 12 set. 2022.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1997.

SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). **Relatório dos resultados do SAEB 2019**, v. 1, Inep/MEC, Brasília-DF, 2022. Disponível em: [https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/saeb/2019/resultados/relatorio\\_de\\_resultados\\_do\\_saeb\\_2019\\_volume\\_1.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf). Acesso em: 20/01/2023.

SKOVSMOSE, O. C. **Desafios da reflexão em educação matemática**. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. SBEM, Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus, 2008.

TEPLITZ, C. J. **The Learning Curve Deskbook**: A reference Guide to Theory, Calculations and Applications. New York: Quorum Books, 1991.

TOWILL, D. R. Forecasting Learning Curves. **International journal of Forecasting**. Netherlands, v. 6, n. 1, p. 25-38, 1990.

WRIGHT, T. P. **Factors Affecting the Cost of Airplanes**. Journal of the Aeronautical Sciences, London, v. 3, p. 122-128, 1936.

**Recebido em:** 05/12/2024  
**Aprovado em:** 30/04/2025